’20

帰国生

数　学　問　題

（医学部医学科）

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この『数学問題』を開いてはいけません。
2. この中には，2枚の下書用紙と，問題文を含む5枚の解答用紙があります。
3. 試験開始後，直ちに，二つ折りになっているすべての用紙を広げてください。
4. 問題に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所等があった場合は申し出てください。
5. 氏名と受験番号は，すべての解答用紙の所定の欄に必ず記入してください。
6. 5枚の解答用紙のみを回収しますので，この表紙と2枚の下書用紙は持ち帰ってください。
7. 解答用紙の裏面は計算等の下書に使用しても構いませんが，解答は各問題の下の解答欄に記入し，裏面は解答に使用しないでください。解答用紙の裏面に解答してもその部分は採点しません。

下　書　用　紙　(1)

下　書　用　紙　(2)

数　　学

氏名	

受験番号	

1 p，q を実数の定数とする。3次方程式 $x^3+px^2+qx+1=0$ が虚数解 α と $\dfrac{1}{\alpha}$ をもつとき，以下の問いに答えよ。

（1）$p=q$ が成り立つことを示せ。

（2）定数 p の値の範囲を求めよ。

（3）α の実部 s，虚部 t について $s+2t=-1$ が成り立つときの p の値を求めよ。

[解答欄]

得点	

数　　　学

氏名	

受験番号	

2　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は次の条件によって定められている。

すべての自然数 n に対して a_n, b_n はともに整数で，$(3+2\sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2}\,b_n$

このとき以下の問いに答えよ。

（1）すべての自然数 n について $a_n{}^2 - 2b_n{}^2 = 1$ が成り立つことを証明せよ。

（2）数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ。

（3）極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ を求めよ。

[解答欄]

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

3 四面体 OABC は次の 2 条件を満たすとする。

1．$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = 1$

2．$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{AOC} = 90^\circ$,　$\angle\mathrm{BOC} = 60^\circ$

辺 BC を $1:2$ に内分する点を M，辺 AC を $t:(1-t)$ に内分する点を N とおき，線分 AM と線分 BN との交点を P とおく。ただし，t は $0 < t < 1$ を満たす実数とする。以下の問いに答えよ。

（1）$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ および t を用いて表せ。

（2）線分 OP の長さを最小にする t の値を求めよ。

[解答欄]

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

4　a を正の定数，e を自然対数の底とし，$f(x) = \{x^2 - (a+1)x + 2a - 1\}\, e^{-x}$ とおく。以下の問いに答えよ。

（1）$x > 0$ のとき，不等式 $e^x > \dfrac{x^3}{6}$ が成り立つことを証明せよ。ただし，$x > 0$ のとき不等式 $e^x > x$ が成り立つことを用いてよいとする。

（2）関数 $f(x)$ が $x \geqq 0$ において最小値をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

（3）$a = \dfrac{1}{2}$ のとき，定積分 $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\, dx$ を求めよ。

[解答欄]

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

5　a，b は正の定数で $a>b$ とする。座標平面上に楕円 C_1 : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と楕円 C_2 : $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ がある。直線 ℓ は楕円 C_1，C_2 のどちらにも第 1 象限で接するものとする。直線 ℓ の方程式を $y=mx+n$ とおく。以下の問いに答えよ。

（1）m と n を求めよ。

（2）$a=\sqrt{3}$，$b=1$ とする。楕円 C_1 と直線 ℓ との接点の x 座標を d とおく。このとき 3 つの領域

$$y \geqq \sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} \leqq x \leqq d, \qquad y \leqq mx+n$$

の共通部分の面積を求めよ。

[解答欄]

得点	