数　　学

氏 名	

受験番号	

1　a は定数とし，関数 $f(x)=|x^2-ax|+|a|$ を考える。関数 $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値を M とする。以下の問に答えよ。

(1) $a \leqq 0$ のとき，M を a の式で表せ。

(2) $a>0$ で $M=f\left(\dfrac{a}{2}\right)$ となるように，定数 a の値の範囲を定めよ。

[解答例]

(1) $a \leqq 0$ のとき，$x^2-ax \geqq 0 \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ なので

$$f(x)=x^2-ax-a=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-a$$

したがって，軸は $x=\dfrac{a}{2} \leqq 0$ なので $x=1$ で最大値をとる。すなわち

$$M=f(1)=\underline{1-2a}$$

(2) **(i)**　$0<a \leqq 1$ のとき，

$$f(x)=|x(x-a)|+a=\begin{cases}-x^2+ax+a & (0 \leqq x < a)\\ x-ax+a & (a \leqq x \leqq 1)\end{cases}=\begin{cases}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+a & (0 \leqq x < a)\\ \left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+a & (a \leqq x \leqq 1)\end{cases}$$

なので，

$$M=\max\left\{f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}+a,\quad f(1)=1\right\}$$

となる。したがって，$0<a \leqq 1$ かつ $\dfrac{a^2}{4}+a \geqq 1$ のとき，$M=f\left(\dfrac{a}{2}\right)$ となる。すなわち，

$$2\sqrt{2}-2 \leqq a \leqq 1$$

(ii)　$a>1$ のとき，$f(x)=-x^2+ax+a=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+a$ なので

$$M=\begin{cases}f\left(\dfrac{a}{2}\right) & (1<a \leqq 2)\\ f(1) & (2<a)\end{cases}$$

(i), (ii) より a の範囲は

$$\underline{2\sqrt{2}-2 \leqq a \leqq 2}$$

数　　学

氏名	

受験番号	

2　平面上の 3 点 A, B, C 間のそれぞれの距離が $\mathrm{AB}=4x,\ \mathrm{BC}=x^2+3,\ \mathrm{CA}=x^2+2x-3$ となっている。以下の問に答えよ。

(1) $\mathrm{AB}+\mathrm{CA}>\mathrm{BC}$ となる x の条件を求めよ。

(2) 点 A, B, C を頂点とする三角形が存在するための x の条件を求めよ。

(3) x が (2) の条件をみたすとき，$\angle\mathrm{A}$ の大きさを求めよ。

(4) x が (2) の条件をみたすとき，$\angle\mathrm{A}, \angle\mathrm{B}, \angle\mathrm{C}$ の大小関係を明らかにせよ。

[解答例]

(1) $\mathrm{AB}+\mathrm{CA}>\mathrm{BC}$ より

$$4x+x^2+2x-3>x^2+3$$

したがって，$\underline{x>1}$ となる。

(2) AB, BC, CA は辺の長さであるから，$\mathrm{AB}>0,\ \mathrm{BC}>0,\ \mathrm{CA}>0$ 三角形の 1 辺の長さは他の 2 辺の長さの和より小さい。逆に 3 つの正の実数がどの実数も他の 2 つの実数の和よりも小さいという条件をみたしていたら，各辺の長さがその 3 つの実数となる三角形は存在する。A, B, C が三角形の頂点であれば

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}+\mathrm{CA}-\mathrm{BC} &> 0\\ \mathrm{AB}+\mathrm{BC}-\mathrm{CA} &> 0\\ \mathrm{BC}+\mathrm{CA}-\mathrm{AB} &> 0\end{aligned}$$

(1) より $x>1$ は必要条件。このとき，$\mathrm{AB}=4x>0,\quad \mathrm{BC}=x^2+3>0,\quad \mathrm{CA}=x^2+2x-3>0$ をみたしており，さらに

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}+\mathrm{BC}-\mathrm{CA} &= 2x>0\\ \mathrm{BC}+\mathrm{CA}-\mathrm{AB} &= 2x(x-1)>0\end{aligned}$$

となるので，求める条件は $\underline{x>1}$

(3) 余弦定理より，

$$\cos\angle A=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{CA}^2-\mathrm{BC}^2}{2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CA}}=\frac{(4x)^2+(x^2+2x-3)^2-(x^2+3)^2}{2\cdot(4x)\cdot(x^2+2x-3)}=\frac{1}{2}$$

したがって，$\underline{\angle\mathrm{A}=60^\circ}$

(4) (3) より $\angle\mathrm{B}+\angle\mathrm{C}=120^\circ$ となることに注意すると正弦定理より

(i) $\mathrm{AB}>\mathrm{CA}$，すなわち $1<x<3$ のとき，$\angle\mathrm{B}<\angle\mathrm{A}<\angle\mathrm{C}$

(ii) $\mathrm{AB}=\mathrm{CA}$，すなわち $x=3$ のとき，$\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{C}$

(iii) $\mathrm{AB}<\mathrm{CA}$，すなわち $x>3$ のとき，$\angle\mathrm{C}<\angle\mathrm{A}<\angle\mathrm{B}$

数　　学

氏名	

受験番号	

3 底面が平行四辺形 OABC である四角錐 D-OABC を考え，点 X を線分 BD を $2:1$ に内分する点，点 P を線分 AD 上の点，点 Q を線分 CD 上の点とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ として，以下の問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ を $\vec{a},\vec{c},\vec{d}$ を用いて表せ。

(2) $\triangle$ACD を含む平面と直線 OX との交点を Y とする。$\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ を $\vec{a},\vec{c},\vec{d}$ を用いて表せ。

(3) 4 点 O, X, P, Q が同一平面上にあるとき，$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}}\leqq\dfrac{2}{3}$ であることを示せ。

[解答例]

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{a}+\vec{c}$ に注意すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OX}} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{c})+\frac{2}{3}\vec{d}\\ &= \underline{\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{d}}\end{aligned}$$

(2) 点 Y は線分 OX 上にあるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=t\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\frac{t}{3}\vec{a}+\frac{t}{3}\vec{c}+\frac{2t}{3}\vec{d}\quad(0\leqq t\leqq 1)$$

と表される。また，点 Y は点 A, C, D を含む平面上にあるので $\dfrac{t}{3}+\dfrac{t}{3}+\dfrac{2t}{3}=1$，すなわち $t=\dfrac{3}{4}$ である。したがって，

$$\underline{\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}}$$

(3) 4 点 O, X, P, Q が同一平面上にあるとき OPXQ は三角錐ではなく四角形となる。線分 PQ は $\triangle$ACD に含まれるので対角線 OX と PQ の交点が Y となる。つまり，点 Q, Y, P は同一直線上にある。逆に点 Q, Y , P が同一直線上にあれば 直線 OX と直線 PQ は点 Y で交わるので OXPQ は同一平面上にある。したがって，$\triangle$ACD において CY と 直線 AD の交点を P$'$ とすると AP $\leqq$ AP$'$ であることがわかる。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CY}} &= \overrightarrow{\mathrm{OY}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &= \frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}-\vec{c}\\ &= \frac{1}{4}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\end{aligned}$$

なので，$\overrightarrow{\mathrm{CP'}}=k\overrightarrow{\mathrm{CY}}$ と表されることに注意すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP'}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+k\overrightarrow{\mathrm{CY}}\\ &= \frac{k}{4}\vec{a}+\left(1-\frac{3k}{4}\right)\vec{c}+\frac{k}{2}\vec{d}\end{aligned}$$

となるが P$'$ は AD 上の点なので $1-\frac{3k}{4}=0$，すなわち $k=\frac{4}{3}$ となる。したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{d}$$

となるので点 P$'$ は AD を $2:1$ に内分する点である。以上より

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}}\leqq\frac{\mathrm{AP'}}{\mathrm{AD}}=\frac{2}{3}$$

数　　学

氏名	

受験番号	

4　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，2 つの関数 $x = \cos\theta + \sin\theta$, $y = \cos\left(2\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ について，以下の問に答えよ。

(1) x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) y を x の関数で表せ。

(3) y の最大値と最小値を求めよ。

[解答例]

(1) 三角関数の合成より

$$x = \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

と変形できる。$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \pi + \frac{\pi}{4}$ に注意すると，$\underline{-1 \leqq x \leqq \sqrt{2}}$

(2) (1) より $x = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ なので

$$\begin{aligned} y &= \cos\left\{2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right\} - \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left\{2\cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right\} - \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= x^2 - \frac{x}{\sqrt{2}} - 1 \end{aligned}$$

(3) (1), (2) より

$$y = x^2 - \frac{x}{\sqrt{2}} - 1 = \left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{9}{8} \qquad \left(-1 \leqq x \leqq \sqrt{2}\right)$$

なので，頂点は $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, -\dfrac{9}{8}\right)$ であり，$x = -1$ のとき $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$x = \sqrt{2}$ のとき $y = 0$，$-1 \leqq \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \leqq \sqrt{2}$ であるから

$$\begin{aligned} x = -1 &\quad \text{のとき最大値} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \frac{1}{2\sqrt{2}} &\quad \text{のとき最小値} \quad y = -\frac{9}{8} \end{aligned}$$

となる。

数　　学

氏 名	

受 験 番 号	

問題 $\boxed{5}$ と問題 $\boxed{6}$ は選択問題ですので，どちらか 1 題を選択し，その解答は選択した問題の解答欄に記入してください。また，選択しなかった問題の解答欄に「選択しない」と記入してください。

$\boxed{5}$ 3 次関数 $f(x)$ は常に $f(-x) = -f(x)$ を満たし，$x = 1$ のときに極大値 2 をとる。このとき，以下の問に答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた 2 つの部分のうち，$y \geqq 0$ の領域にある部分を D とする。直線 $y = ax$ が D の面積を 2 等分するように a の値を定めよ。

[解答例]

(1) $f(x)$ は奇関数であるから，$f(x) = px^3 + qx$ とおく。導関数は $f'(x) = 3px^2 + q$ となる。$f(x)$ が $x = 1$ のときに極大値 2 をとるから

$$\begin{cases} f'(1) = 3p + q = 0 \\ f(1) = p + q = 2 \end{cases}$$

でなければならない。これを解いて，$(p, q) = (-1, 3)$ を得る。このとき，

$$f(x) = -x^3 + 3x, \qquad f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$

確かに，$x = 1$ のときに極大値 2 をとる。したがって $\underline{f(x) = -x^3 + 3x}$

(2) $f(x) = -x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$ より，$y = f(x)$ は x 軸と $x = 0, \pm\sqrt{3}$ の 3 点で交わる。ゆえに，

$$0 \leqq x \leqq \sqrt{3}$$

の範囲で $y = f(x)$ と x 軸に囲まれた部分が D である。$f(x) - ax = -x\left\{x^2 + (a-3)\right\}$ であるから直線 $y = ax$ が $f(x)$ と 3 点で交わり，さらに D を二つに分けるには

$$0 < a < 3$$

でなければならない。このとき，$x > 0$ において $y = f(x)$ と直線 $y = ax$ は $x = \sqrt{3-a}$ で交わる。D のうち，直線 $y = ax$ より上側にある部分の面積を $S(a)$ とすると

$$S(a) = \int_0^{\sqrt{3-a}} \left\{(3x - x^3) - ax\right\} dx = \left[\frac{3-a}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^{\sqrt{3-a}} = \frac{(3-a)^2}{4}$$

また，D の面積は $S(0) = \dfrac{9}{4}$ である。したがって，$S(a) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{9}{4}$ となる a を求めればよいから，

$$\frac{(3-a)^2}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{4}$$

これを解くと $a = 3 \pm \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ となる。$0 < a < 3$ であったから

$$\underline{a = 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

である。

数　　学

氏 名		受 験 番 号	

問題 $\boxed{5}$ と問題 $\boxed{6}$ は選択問題ですので，どちらか **1** 題を選択し，その解答は選択した問題の解答欄に記入してください。また，選択しなかった問題の解答欄に 「選択しない」 と記入してください。

$\boxed{6}$ 関数 $f(x) = e^{-x}\sin 2x$ について，以下の問に答えよ。

(1) $f(x)$ の導関数を求めよ。

(2) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\ dx$ とすると $I = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos 2x\ dx$ となることを示せ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\ dx$ を求めよ。

[解答例]

(1) $\underline{f'(x) = -e^{-x}\sin 2x + 2e^{-x}\cos 2x}$

(2) $f'(x) = -f(x) + 2e^{-x}\cos 2x$ より $f(x) = 2e^{-x}\cos 2x - f'(x)$ であるから

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2e^{-x}\cos 2x - f'(x)\right) dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos 2x\ dx + [f(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos 2x\ dx$$

(3) 部分積分法 と (2) より

$$\begin{aligned} I &= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{e^{-x}\right\}'\cos 2x\ dx \\ &= -2\left\{\left[e^{-x}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\ dx\right\} \\ &= 2(e^{-\frac{\pi}{2}} + 1) - 4I \end{aligned}$$

したがって， $\underline{I = \dfrac{2(e^{-\frac{\pi}{2}} + 1)}{5}}$